4
НОМЕР

БОНЦ

ISSN 2304-9081
ЭЛЕКТРОННЫЙ ЖУРНАЛ
On-line версия журнала на сайте
http://www.elmag.uran.ru

БЮЛЛЕТЕНЬ
ОРЕНБУРГСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА УрО РАН

2018

УЧРЕДИТЕЛИ
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РАН
ОРЕНБУРГСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР УрО РАН

УДК 69.04

М.Ю. Нестеренко, А.М. Нестеренко, А.В. Бухвалова

РАСЧЁТ ЖЁСТКОСТИ БАЛОЧНОЙ МНОГОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ ПО ЧАСТОТАМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Оренбургский научный центр УрО РАН (Отдел геоэкологии), Оренбург, Россия

Рассмотрен подход к расчёту фактической несущей способности конструктивной системы по динамическим параметрам, в частности, по резонансным частотам. В статье представлены предпосылки для решения такой задачи методом конечных элементов (МКЭ). Во-первых, несущая способность может быть оценена по изгибной жесткости, которая, в свою очередь, связана с собственными частотами. Во-вторых, современные вибрационные испытания демонстрируют высокую точность определения этих параметров, что говорит о достоверности диагностики. В-третьих, использование МКЭ для этой проблемы делает анализ применимым к более широкому спектру конструктивных решений. В-четвертых, самые современные вычислительные комплексы не включают в себя функционал для расчета изгибной жесткости системы по входным значениям резонансных частот. В статье представлен метод расчета изгибной жесткости плоской одномерной балочной системы по собственным частотам.

Ключевые слова: конструктивная система, несущая способность, динамика, жёсткость, частота собственных колебаний.

M.Yu. Nesterenko, A.M. Nesterenko, A.V. Bukhvalova

CALCULATION STIFFNESS OF MULTIMASS BEAM SYSTEM OVER NATURAL OSCILLATIONS FREQUENCIES

Orenburg Scientific Center, UrB RAS (Department of Geoecology), Orenburg, Russia

An actual load-bearing capacity of structure system can be calculated by dynamic parameters, in particular by resonant frequency. The prerequisites for solving such a problem by the finite element method (FEM) are presented in the article. First, load-bearing capacity can be estimated by flexural stiffness, which, in turn, is associated with the natural frequencies. Secondly, modern vibration tests demonstrate high accuracy in determination of these parameters, which reflects reliability of the diagnosis. Thirdly, usage of FEM for this problem makes analysis applicable to wider range of design construction solutions. Fourthly, the most modern computational complexes do not include a functional for calculating flexural stiffness of a system according to the input values of resonance frequencies. The article presents the calculating method for flexural stiffness of a flat one-dimensional beam system by its own frequencies.

Key words: structure system, load-bearing capacity, dynamics, stiffness, natural oscillations frequency.

DOI: 10.24411/2304-9081-2018-14021

Введение

Неразрушающие методы контроля эксплуатационной надежности строительных объектов являются перспективными [1]. Одним из них выступает контроль динамических параметров конструктивной системы. Высокоточное сейсмометрическое и вибрационное цифровое оборудование, необходимое для регистрации колебательных процессов, позволяет получить достоверную информацию о динамике сооружений [2-5]. Эта информация используется для обследования технического состояния объектов [3, 4, 6]. Идея мониторинга динамических параметров конструктивной системы с целью анализа ее внутренней структуры не нова. Например, V. Volkovas [6, 7] исследует конструктивные дефекты зданий с использованием частотно-временного анализа и детально определяет зависимость резонансных частот колебаний поврежденной конструктивной рамы от типа и направления дефекта. В работах [8-10] исследуется реакция на сейсмическое воздействие различных сооружений с целью их диагностики.

Одним из направлений вибродиагностики является анализ жесткости по резонансным частотам. Известно, что дефекты и повреждения строительных конструкций, возникающие на этапе монтажа и эксплуатации, приводят к изменениям резонансных частот собственных колебаний и демпфирующих свойств конструкционных материалов зданий или конструкций [3, 5, 11]. В частности, большинство дефектов уменьшают фактические значения жесткости при изгибе по сравнению с их расчетным значением. Собственные колебания конструктивной системы обычно происходят с наибольшей амплитудой вдоль самого поврежденного сечения с наименьшей изгибной жесткостью EJ [2]. Это позволяет оценить текущий ресурс по остаточной несущей способности.

Для расчёта жесткости обычно составляется модель конструктивной системы с неизвестными характеристиками поперечного сечения и известными резонансными частотами. Чтобы сделать метод анализа жесткости применимым к более широкому спектру проектных конструктивных решений, требуется исследование по применению метода конечных элементов (МКЭ) для расчета жесткости по известным частотам собственных колебаний. Необходимо вычислять изгибную жесткость и момент инерции поперечного сечения элемента системы, работающего на изгиб при колебаниях.

DOI: 10.24411/2304-9081-2018-14021

Сложность таких расчетов определяется необходимостью учета динамической работы всей конструктивной системы в целом, поэтому задача аналогична прямому моделированию и расчету несущей способности конструкций. Поэтому применение метода МКЭ для решения таких задач становится более актуальным, поскольку оно создает базу для разработки программного обеспечения для автоматизации вычислений [12]. Однако в современной литературе нет исследований и рекомендаций для решения обратной задачи с учетом специфики метода МКЭ. В современных конструкторских комплексах, таких как SCAD Office, ANSYS, ЛИРА-САПР и др., нет подходящей функциональности, которая позволяет игнорировать характеристики поперечного сечения и вводить собственные значения резонансных частот конструктивной системы.

Таким образом, целью данного исследования является получение метода расчета изгибной жесткости многомассовой балочной системы по частотам собственных колебаний.

В настоящее время частоты собственных колебаний могут быть определены методом анализа конечных элементов [13, 14], реже – смешанными методами [15] или аналитическими методами [16]. Но для решения такой задачи простейшим методом является составление и решение частотного уравнения для многомассовой системы с n числом степеней свободы.

Рассмотрим плоскую одномерную балочную систему. Уравнения собственных колебаний системы с числом n степеней свободы в амплитудах инерциальных силовых факторов:

$$\sum_{k=1}^{i-1} \delta_{ik} J_k + \left(\delta_{ii} - \frac{1}{\overline{m}_i \omega^2}\right) J_i + \sum_{k=i+1}^{n} \delta_{ik} J_k = 0, i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

где δ_{ik} – i-ая податливость системы в направлении инерционного силового фактора J_k;

$\overline{m}_i$ – i-ая масса, порождающая инерционный силовой фактор J_i;

ω – частота собственных колебаний.

В матричной форме эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\bar{\delta} \cdot J = 0, \qquad (2)$$

где $\bar{\delta}$ – матрица динамической податливости (рис. 1);

J – вектор амплитуд инерционных сил (рис. 2).

$$\overline{\delta} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \cdot\cdot \\ i \\ \cdot\cdot \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdot\cdot & i & \cdot\cdot & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} (\delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}) & \delta_{12}m_2 & \cdot\cdot & \delta_{1i}m_i & \cdot\cdot & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}) & \cdot\cdot & \delta_{2i}m_i & \cdot\cdot & \delta_{2n}m_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \delta_{i1}m_1 & \delta_{i2}m_2 & \cdot\cdot & (\delta_{ii}m_i - \frac{1}{\omega^2}) & \cdot\cdot & \delta_{in}m_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \cdot\cdot & \delta_{ni}m_i & \cdot\cdot & \delta_{nn}m_n - \frac{1}{\omega^2}) \end{array}\right] \end{array}$$

Рис. 1. Матрица динамической податливости балочной многомассовой системы.

Для случая тривиального решения, при котором J=0 (отсутствие движения), необходимо определить детерминант матрицы $\bar{\delta}$:

$$Det(\bar{\delta}) = 0\ . \tag{3}$$

$$\overline{\delta} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdot\cdot \\ k \\ \cdot\cdot \\ n \end{array} \left[\begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ \cdot\cdot \\ J_k \\ \cdot\cdot \\ J_n \end{array}\right]$$

Рис. 2. Вектор амплитуд инерционных сил балочной многомассовой системы.

Для плоской одномерной балочной системы существует одна характеристика жесткости – изгибная жесткость *EJ*. В этом случае каждое направление инерционной силы имеет один и тот же множитель *EJ*. Выведем жесткость *EJ* из выражения податливости δ; тогда следующая замена будет выглядеть:

$$\delta = EJ \cdot k\ , \tag{4}$$

где δ – значение податливости системы от единичной нагрузки в направлении степени свободы.

Произведём данную замену в матрице динамической податливости, разделим каждый элемент на жёсткость *EJ* (рис. 3) и обозначим:

$$\lambda = \frac{1}{EJ \cdot \omega^2} \tag{5}$$

$$\bar{\delta} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdot\cdot & i & \cdot\cdot & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdot\cdot \\ i \\ \cdot\cdot \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} (k_{11}m_1 - \frac{1}{EJ\omega^2}) & k_{12}m_2 & \cdot\cdot & k_{1i}m_i & \cdot\cdot & k_{1n}m_n \\ k_{21}m_1 & (k_{22}m_2 - \frac{1}{EJ\omega^2}) & \cdot\cdot & k_{2i}m_i & \cdot\cdot & k_{2n}m_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ k_{i1}m_1 & k_{i2}m_2 & \cdot\cdot & (k_{ii}m_i - \frac{1}{EJ\omega^2}) & \cdot\cdot & k_{in}m_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ k_{n1}m_1 & k_{n2}m_2 & \cdot\cdot & k_{ni}m_i & \cdot\cdot & (k_{nn}m_n - \frac{1}{EJ\omega^2}) \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 3. Матрица динамической податливости после введённых замен.

Для вычисления детерминанта матрицу на рисунке 3 приравняем к нулю, тогда выражение примет вид, изображённый на рисунке 4.

$$\bar{\delta} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdot\cdot & i & \cdot\cdot & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdot\cdot \\ i \\ \cdot\cdot \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} (k_{11}m_1 - \lambda) & k_{12}m_2 & \cdot\cdot & k_{1i}m_i & \cdot\cdot & k_{1n}m_n \\ k_{21}m_1 & (k_{22}m_2 - \lambda) & \cdot\cdot & k_{2i}m_i & \cdot\cdot & k_{2n}m_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ k_{i1}m_1 & k_{i2}m_2 & \cdot\cdot & (k_{ii}m_i - \lambda) & \cdot\cdot & k_{in}m_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ k_{n1}m_1 & k_{n2}m_2 & \cdot\cdot & k_{ni}m_i & \cdot\cdot & (k_{nn}m_n - \lambda) \end{bmatrix} \end{array} = 0$$

Рис. 4. Матричное выражение для вычисления детерминанта матрицы $\bar{\delta}$.

При известных множителях *k* и *m* и, раскрыв определитель, мы получаем алгебраическое уравнение степени *n* относительно λ (6).

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (6)$$

Решение данного уравнения – это набор *n* корней λ_1, λ_2, … , λ_n. Если имеется информация о значении хотя бы одной из частот собственных колебаний ω_1, ω_2, $\ldots\omega_n$, то в данном случае возможно вычисление изгибной жёсткости *EJ* системы по формуле (7):

$$EJ = \frac{1}{\lambda \cdot \omega^2}. \qquad (7)$$

Заключение

Результаты работы приводят к следующим выводам. Рассматриваемый

DOI: 10.24411/2304-9081-2018-14021

метод расчета является основой программного обеспечения для анализа фактической жесткости и остаточного технического ресурса зданий и сооружений. Перспектива развития данного метода заключается в вычислении локальной изгибной жесткости *EJ* отдельного конечного элемента модели конструктивной системы. Динамические испытания позволяют проводить измерения не только резонансных частот, но и значений податливости в требуемой точке сооружения.

Таким образом, в конечно-элементную модель системы могут быть внедрены измеренные значения податливости с последующим перебором и вычислением значений жесткости всех конечных элементов при помощи итерационных математических методов. Тем самым, становится возможным выявление зон пониженной жесткости, которые говорят о наличии конструктивных дефектов, в том числе внутренних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trampczynski W. 56Th Scientific Conference of Committee for Civil Engineering of the Polish Academy of Sciences and Scientific Committee of the Polish Association of Civil Engineers and Technicians. Archives of Civil Engineering. LVI. 2010. 4.
2. Котляревский В.А. Диагностика скрытых дефектов сейсмостойких сооружений по изменению частотного спектра. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2014. 4: 36-42.
3. Жаданов В.И., Нестеренко А.М., Нестеренко М.Ю., Столповский Г.А. Исследование поглощающих свойств материала строительных конструкций на примере железобетонной перемычки. Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. 9 (693): 76-86.
4. Капустян Н.К., Антоновская Г.Н., Басакина И.М., Глотов В.А. Комплекс инженерно-сейсмометрических методик для оценки состояния зданий и сооружений. Наука и безопасность. 2012. 5 (5): 40-61.
5. Нестеренко М.Ю., Нестеренко А.М. Обследование зданий и сооружений методом сейсмического зондирования. Бюллетень Оренбургского научного центра УрО РАН. 2014. 2: 1-7. (URL: http://elmag.uran.ru:9673/magazine/Numbers/2014-2/Articles/ Nesterenko%20MY- Nesterenko%20AM-2014-2.pdf)
6. Volkovas V., Petkevičius K., Eidukevičiūtė M., Akinci T.C. Diagnostics of construction defects in a building by using time-frequency analysis. MECHANIKA. 2012. 18(4): 432-437.
7. Volkovas V. The concept of buildings stability monitoring and damage diagnostics. Key Engineering Materials, 2013. Key Engineering Materials 569-570: 238-245.
8. Miyamoto S., Miyazawa K., Irie Ya., Wu J., Nomata Yo., Goto Os.A study on seismic performance and seismic diagnosis, seismic retrofit of Japanese temple. 13th World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, B.C., Canada, 2004: No. 853.
9. Peterson J. Observations and modeling of seismic background noise. Open-File Rep. Albuquerque. New Mexico, 1993: 93-322.
10. Crainic L., Munteanu M. Seismic performance of Concrete Buildings. Structures and Infrastructures Series 9: 1-243.
11. Коробко В.И., Черняев А.А. Решение задач поперечного изгиба пластинок с использованием конформных радиусов. Строительная механика и расчет сооружений.

2011. 6: 16-22.
12. Городецкий А.С., Лазарев А.А. ЛИРА-САПР — программный комплекс для расчета и проектирования строительных конструкций различного назначения. Новые компьютерные технологии. 2011. Т. 9 №1 (9): 22-26.
13. Ghorbe O., Casimir J.B., Hammami L., Tawfig I., Haddar M. Dynamic stiffness formulation for free orthotropic plates. Journal of Sound and Vibration. 2015. 346: 361-375.
14. Тюкалов Ю.Я. Определение частот свободных колебаний методом конечных элементов в напряжениях. Инженерно-строительный журнал. 2016. 7 (67): 39-54.
15. Kamgar R., Rahgozar R. A simple approximate method for free vibration analysis of framed tube structures. The Structural Design of Tall and Special Buildings. 2013. 22 (2): 217-234.
16. Strange G., Fix G.J. An analysis of Finite Element Method. Wellesley-Cambridge; 2nd edition, 2008. 414p.

Поступила 18.12.2018 г.

(*Контактная информация:* **Нестеренко Максим Юрьевич** – доктор геолого-минералогических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Отдела геоэкологии Оренбургского научного центра УрО РАН; адрес: 460014, Оренбург, ул. Набережная, 29; E-mail: n_mu@mail.ru;

Нестеренко Алексей Максимович – аспирант Оренбургского государственного университета по направлению «Строительные конструкции. Здания и сооружения», ведущий инженер Отдела геоэкологии Оренбургского научного центра УрО РАН; адрес: 460014, Оренбург, ул. Набережная, 29; E-mail: Alexnes@mail.ru);

Бухвалова Анастасия Владимировна – ведущий инженер Отдела геоэкологии Оренбургского научного центра УрО РАН; адрес: 460014, Оренбург, ул. Набережная, 29; E-mail: Geoecol-onc@mail.ru).

LITERATURE

1. Trampczynski W. 56th Scientific Association of Civil Engineers and Technicians. Archives of Civil Engineering. Lvi 2010. 4.
2. Kotlyarevsky V.A. Diagnostics of hidden defects of seismic structures to change the frequency spectrum. Earthquake resistant construction. Safety of buildings. 2014. 4: 36-42.
3. Zhadanov V.I., Nesterenko A.M., Nesterenko M.Yu., Stolpovsky G.A. The study of the absorbing properties of the material of building structures on the example of a reinforced concrete lintel. Proceedings of higher educational institutions. Building. 2016. 9 (693): 76-86.
4. Kapustyan N.K., Antonovskaya G.N., Basakina I.M., Glotov V.A. Complex engineering seismometric methods for assessing the condition of buildings and structures. Science and safety. 2012. 5: No. 5. P. 40-61.
5. Nesterenko M.Yu., Nesterenko A.M. Inspection of buildings and structures by seismic sounding. Bulletin of the Orenburg Scientific Center UB RAS. 2014. 2: 1-7. (URL: http://elmag.uran.ru:9673/magazine/Numbers/2014-2/Articles/ Nesterenko % 20MY-Nesterenko% 20 AM-2014-2.pdf).
6. Volkovas V., Petkevičius K., Eidukevičiūtė M., Akinci T.C. Building time using frequency-time analysis. MECHANIKA. 2012. 18 (4): 432-437.
7. Volkovas V. The concept of buildings. Key Engineering Materials, 2013. Key Engineering Materials 569-570, Pp. 238-245.
8. Miyamoto S., Miyazawa K., Irie Ya., Wu J., Nomata Yo., Goto Os.A study on seismic performance and seismic diagnosis, seismic retrofit of Japanese temple. 13th World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, B.C., Canada, 2004: P. No. 853.

9. Peterson J. Observations and background noise. Open-File Rep. Albuquerque. New Mexico, 1993: 93-322.
10. Crainic L., Munteanu M. Seismic performance of Concrete Buildings. Structures and Infrastructuring Series 9, Pp. 1-243.
11. Korobko V.I., Chernyaev A.A. Solving problems of transverse bending of plates using conformal radii. Construction mechanics and the calculation of structures. 2011. 6: 16-22.
12. Gorodetsky A.S., Lazarev A.A. LIRA-SAPR is a software package for calculating and designing building structures for various purposes. New computer technology. 2011. Vol. 9 No. 1 (9): 22-26.
13. Ghorbe O., Casimir J.B., Hammami L., Tawfig I., Haddar M. Dynamic stiffness formulation for free orthotropic plates. Journal of Sound and Vibration. 2015. 346: 361-375.
14. Tyukalov Yu.Y. Determination of frequencies of free oscillations by the finite element method in voltages. Engineering and Construction Journal. 2016. 7 (67): 39-54.
15. Kamgar R., Rahgozar R. A simple approximate method for framed tube structures. The Structural Design of Tall and Special Buildings. 2013. 22 (2): 217-234.
16. Strange G., Fix G.J. An analysis of Finite Element Method. Wellesley-Cambridge; 2nd edition, 2008. 414p.

Образец ссылки на статью:
Нестеренко М.Ю., Нестеренко А.М., Бухвалова А.В. Расчёт жёсткости балочной многомассовой системы по частотам собственных колебаний. Бюллетень Оренбургского научного центра УрО РАН. 2018. 4. 7с. [Электр. ресурс] (URL: http:// elmag.uran.ru:9673/ magazine/Numbers/2018-4/Articles/MYN-2018-4.pdf)
DOI: 10.24411/2304-9081-2018-14021.

.