

**Ю.М. Нестеренко, М.Ю. Нестеренко, И.И. Бондаренко, В.В. Влацкий.**  
U.M. Nesterenko, M. U. Nesterenko, I.I. Bondarenko, V.V. Vlatsky.  
*Отдел геоэкологии Оренбургского научного центра УрО РАН, Россия Оренбург*  
*Geocological department of Orenburg Science Centre RAS, Russia, Orenburg*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА С УЧЕТОМ  
МИКРОРЕЛЬЕФА СКЛОНА.**

**MATHEMATICAL MODELING OF SURFACE RUNOFF WITH CHET OF THE  
MICRORELIEF OF THE SLOPE.**

**Аннотация.** Представлена математическая модель и компьютерная программа расчета поверхностного стока с учетом рельефа поверхности. Описаны алгоритмы аппроксимации стоковой поверхности, основанные на разбиении поверхности на элементарные площадки, расчете стока для каждой из них и интегрального поверхностного стока. Ключевые слова: гидрология, поверхностный сток, испарение, инфильтрация, математическая модель поверхностного стока, балансовое уравнение поверхностного стока.

**Abstract.** A mathematical model and computer program for calculating the runoff based on topography of the surface. The algorithms of approximation of the surface runoff, based on partitioning the surface into elementary fields, the calculation of runoff for each of them and the integral of surface runoff. Key words: hydrology, runoff, evaporation, infiltration, a mathematical model of surface flow, the balance equation of surface runoff

Проблема расчетов поверхностного стока - одна из центральных в гидрологии суши. На сегодняшний день существуют большое количество моделей стока [1,2,3], однако большинство из них не учитывают рельеф поверхности, моделируя формирование поверхностного стока для всей поверхности в целом. В данной работе представлен расчет стока на стоковых площадках с учетом рельефа поверхности в условиях Южного Предуралья.

Расчет стока основан на многолетних (1938 – 2010 гг.) наблюдениях за стоком на ряде стоковых площадок. Отдельные статьи уравнения водного баланса рассчитываются по слоям, слой поверхностного стока определяется как остаток балансового уравнения (1).

Расчеты поверхностного стока талых вод ведутся по формуле [4]

$$A_3 + A_B = \Phi_{II} + E + U_{OT}, \quad (1)$$

где  $A_3$  – слой зимних осадков (мм/сутки);

$A_B$  – слой осадков за время снеготаяния (мм/сутки);

$\Phi_{II}$  – слой инфильтрационной воды (мм)

$E$  – слой суммарного испарения с поверхности (мм)

$U_{OT}$  – слой стока (оттока) воды с площадки (мм).

Расчет стока в подзоне активного водообмена ведется по формуле [4]

$$M_{A2} = M_{A1} + \Phi_{II}, \quad (2)$$

где  $M_{A1}$  ( $M_{A2}$ ) – слой влаги в подзоне активного водообмена (ПЗАВ) (мм) в начале (конце) расчетного периода.

Поверхностный склоновый сток талых вод, являясь результирующей их взаимодействия с факторами, определяющими сток, реагирует на все их изменения. Все более значительными становятся антропогенные изменения в природе. На Южном Урале практически не осталось водосборов с неизменными человеком стокообразующими факторами. Это обуславливает необходимость учета этих изменений при гидрологических расчетах и прогнозах. Балансовая модель формирования поверхностного стока в синтезе с аппроксимацией рельефа поверхности позволяет учитывать антропогенные изменения территории, что приводит к увеличению точности гидрологических расчетов.

Данные по рельефу местности задаются с помощью карты горизонталей. Поэтому следует разбить исходную произвольную поверхность на множество типовых площадок.

Существуют различные способы подобного разбиения: триангуляция, разбиение на прямоугольные площадки, разбиение на сектора и т.д. Дальнейшая задача - расчет стока на каждой полученной при разбиении площадке и интеграция результатов для всей поверхности в целом.

*Методы решения задачи расчета стока для прямоугольной поверхности.*

Исходные данные для расчетов:

- 1) карта горизонталей исследуемой территории;
- 2) карта типов почв (поверхностей) исследуемой территории;
- 3) вспомогательные таблицы инфильтрации, испарения в зависимости от типов поверхностей.

Для расчета стока с прямоугольной поверхности воспользуемся уравнением баланса поверхностного стока (1)

Исходя из заданных ( $A_3, A_B, K_\phi, K_{II}$ ) и рассчитанных ( $\Phi_{II}, E$ ) величин определяем:

$U_{OT} = A_3 + A_B - \Phi_{II} - E$  – отток (сток) с площадки,

$\Delta M_A = M_{A2} - M_{A1}$  – изменение запасов влаги в ПЗАВ.

Из формулы (2) следует, что  $\Delta M_A = \Phi_{II}$ .

Полученные выходные данные корректно решают поставленную задачу.

*Расчет стока для прямоугольного в плане склона, разбитого на  $n$  площадок.*

Каждая стоковая площадка  $S_i, i = 1, 2, \dots, n$  приближается стандартным прямоугольником и расположена под углом наклона  $\alpha_i$ . Нормальный вектор каждой стоковой площадки лежит в плоскости, ортогональной горизонтальной площадке.

Для каждой стоковой площадки  $S_i$  проводится соответствующий расчет:

$$U_{IPi} + A_{3i} + A_{Bi} = \Phi_{IIi} + E_i + U_{OTi}, \quad (3)$$

$$M_{A2i} = M_{A1i} + \Phi_{IIi}, \quad (4)$$

$$U_{OTi} = U_{IP(i+1)}, \quad (5)$$

где  $U_{IPi}$  – слой притока воды на площадку  $S_i$  с вышележащей площадки  $S_{i-1}$ . Величины  $A_{3i}; A_{Bi}; \Phi_{IIi}; E_i; M_{A2i}; M_{A1i}$  имеют тот же самый смысл, что и в алгоритме для соответствующего прямоугольника (стоковой площадки)  $S_i$ . Дополнительное соотношение  $U_{OTi} = U_{IP(i+1)}$  означает, что отток с площадки  $S_i$  есть приток на площадку  $S_{i+1}$ . Отток с последней площадки и есть результирующий сток с прямоугольного в плане склона.

Для того, чтобы вычислить сток воды с унимодальной поверхности, разбитой на множество секторов, нужно повторить эти вычисления для каждого участка.

Рассмотренные методики расчета стока, статей водного баланса и изменения запаса влаги в ПЗАВ допускают обобщение на поверхность произвольной формы за счет дифференциации участков и сведения их к элементарным участкам. Входными данными для расчета стока являются зимние осадки, осадки за время снеготаяния, коэффициенты фильтрации, коэффициенты испарения, приток с предыдущей площадки, площадь предыдущей площадки, площадь текущей площадки, угол наклона предыдущей площадки, угол наклона текущей площадки. На выходе получаем слой стока.

Изолинии уровня могут быть следующего вида:

- 1) изолинии уровня являются замкнутыми, то есть представляют собой некоторую возвышенность, с вершины которой стекают осадки;
- 2) изолинии представляют собой незамкнутые кривые, то есть определяют участок склона, с которого стекает вода;
- 3) смешанный вариант 1 и 2. То есть поверхность имеет водораздел, заданный замкнутой изолинией, с которой происходит поверхностный сток, переходящий далее в сток со склона.

В практических расчетах встречается большое многообразие рельефа, типов почв, условий стока, параметров водного баланса в пределах рассматриваемой поверхности. Чем больше площадь рассматриваемого участка поверхности и степень различия ее географических и гидрологических параметров, тем большая точность требуется при

разбиении такой поверхности. С этой целью была реализована возможность задания точности разбиения.

*Алгоритм разбиения для замкнутых изолиний.*

Изолиния, имеющая наибольшую высоту и, следовательно, являющаяся водоразделом поверхности, приближается эллипсом:

- выбираются 4 крайние точки из изолинии, 2 из которых имеют минимальные координаты  $x$  и  $y$  соответственно, а другие 2 имеют максимальные координаты  $x$  и  $y$  соответственно;

- задается центр эллипса, координаты которого по  $x$  и  $y$  равны среднему значению соответствующих координат выбранных на предыдущем шаге точек;

- строится прямоугольник по 2-м точкам. Одна из точек имеет максимальную координату по  $x$  и минимальную по  $y$ , другая – максимальную по  $x$  и минимальную по  $y$ ;

- искомый эллипс вписывается в прямоугольник. Рассчитывается площадь эллипса по формуле

$$S = \pi \times a \times b,$$

где  $S$  – площадь эллипса;

$a$  – большая полуось;

$b$  – малая полуось.

*Алгоритм разбиения для незамкнутых изолиний.*

Из центра эллипса опускаются лучи по всем направлениям с заданной точностью до пересечения с последней изолинией данной поверхности:

Задается точность предстоящего разбиения. Она выражается в максимальном расстоянии между точками разбиения на последней изолинии. Строится отрезок, соединяющий центр эллипса с первой точкой последней изолинии, которая становится текущей точкой разбиения. Далее проверяется расстояние между ней и следующей точкой изолинии.

Если расстояние больше заданного пользователем, то строится окружность с центром в текущей точке разбиения и радиусом равным заданной точности и находится пересечение этой окружности с отрезком, соединяющим текущую точку разбиения и следующую точку изолинии. Найденная точка пересечения становится текущей точкой разбиения.

Иначе переходим к следующей точке изолинии и опять сравниваем расстояние с заданным. Так поступаем до тех пор, пока оно не станет больше заданного. Когда это произойдет, текущей точкой разбиения становится предыдущая точка изолинии.

При нахождении очередной точки разбиения и построении отрезка из центра эллипса до этой точки, проверяется угол между только что построенным отрезком и предыдущим. Если он меньше определенного значения, то продолжается проверка точек изолинии, следующих далее.

*Алгоритм разбиения поверхностей с замкнутыми изолиниями, переходящих в склон*

Осуществляется обход по всем остальным изолиниям, находящимся между последней из них и водоразделом, и по всем отрезкам разбиения. Парно перебираются все точки изолинии, пока не будет найдена такая пара, точки которой расположены в разных полуплоскостях от текущего отрезка разбиения. Далее находится точка пересечения между ним и отрезком, соединяющем эту пару вершин. Найденная точка заносится в базу как очередная точка разбиения для текущей изолинии.

Для проверки адекватности разработанной программной системы сравнивались расчетные значения с данными полевых измерений на примере Покровского опытного участка. Для этого была проведена оцифровка первой стоковой площадки Покровского участка. Далее оцифрованная стоковая площадка разбивалась на множество элементарных с приемлемой точностью.

Поскольку первая стоковая площадка имеет переменную ширину, то для ее разбиения на элементарные площадки воспользуемся алгоритмом *разбиения для незамкнутых изолиний с переменным числом линий разбиения.*

По введенным исходным данным можно получить значение расходной статьи водного баланса – слоя стока.

Сравнение теоретически рассчитанного стока с данными полевых измерений поверхностного стока, представлено на рис. 1. Из рисунка видно, что различия в значениях поверхностного стока не значительны.

#### ВЫВОДЫ.

В условиях стабильной гидрологической обстановки определяющим фактором формирования поверхностного стока становится рельеф поверхности. Входными данными, позволяющими учитывать рельеф, являются карты изолиний изучаемой поверхности. Предлагается следующая последовательность учета рельефа поверхности: создаются алгоритмы расчета поверхностного стока с различных типов элементарных площадок – прямоугольников, эллипсов, секторов; реальные поверхности аппроксимируются набором элементарных площадок – таким путем описаны склоны с переменной в плане геометрией, а также унимодальные поверхности.



Рис.1. Сравнение расчетного и измеренного поверхностного стока.

В совокупности с измеренными или рассчитанными теоретически гидрологическими параметрами (коэффициентами инфильтрации и испарения, интенсивностью снеготаяния и осадков) удастся рассчитать интенсивность поверхностного стока как с элементарных, так и интегральных площадок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов Ю. Б. Математическое моделирование процессов формирования стока [Текст]: монография. - Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 312 с.
2. Гельфан А. Н. Динамико-стохастическое моделирование формирования талого стока [Текст] : монография А. Н. Гельфан. - М.: Наука, 2007. - 279 с.
3. Кучмент Л.С. Математическое моделирование речного стока. – Л.: Гидрометеиздат, 1972.
4. Ю.М. Нестеренко. Водная компонента аридных зон.- Екатеринбург. Уральский центр академического обслуживания. – 2006. - 286 с.